

P 12

Conduction thermique

12.1 Compétences du chapitre

Notions et contenus	Capacités exigibles
Densité de flux thermique.	<ul style="list-style-type: none"> Définir et algébriser la puissance thermique échangée à travers une interface.
Loi de Fourier.	<ul style="list-style-type: none"> Lier la non-uniformité de la température à l'existence d'un flux thermique et interpréter son sens. Citer des ordres de grandeur de conductivité thermique dans le domaine de l'habitat.
Bilan enthalpique.	<ul style="list-style-type: none"> Établir une relation différentielle entre la température et le vecteur densité de flux thermique.
Équation de la chaleur sans terme source.	<ul style="list-style-type: none"> Établir l'équation de la diffusion thermique. Interpréter qualitativement l'irréversibilité du phénomène. Lier le temps et la longueur caractéristiques d'un phénomène de diffusion au coefficient de diffusion par une analyse dimensionnelle.
Analogie électrique dans le cas du régime stationnaire.	<ul style="list-style-type: none"> Définir la résistance thermique. Exploiter l'analogie lors d'un bilan thermique.
Loi de Newton.	<ul style="list-style-type: none"> Exploiter la loi de Newton fournie pour prendre en compte les échanges conducto-convectifs en régime stationnaire.

12.2 Loi de Fourier

12.2.1 Densité de flux thermique

La présence, dans un milieu matériel sans mouvement macroscopique, d'une inhomogénéité de température, fait apparaître un transfert thermique par conduction.



— Propriétés —

- Ce transfert a lieu des zones les plus chaudes vers les plus froides.
- Il est proportionnel à la surface à travers laquelle on évalue la puissance diffusée.
- Il croît linéairement avec la pente de la variation spatiale de température.

12.2.2 Vecteur densité volumique de courant thermique de conduction

Le transfert thermique par conduction est entièrement caractérisé par le vecteur densité volumique de courant thermique de conduction \vec{j}_{th} .

Son flux à travers une surface élémentaire orientée $d^2\vec{S}$ est égale à la puissance thermique traversant d^2S et comptée positivement dans le sens de $d^2\vec{S}$.

Les unités :

j_{th} s'exprime en $W.m^{-2}$.

12.2.3 Loi phénoménologique de Fourier

où λ est une constante caractéristique du milieu dans lequel a lieu la conduction thermique. Cette constante est appelée *conductivité thermique*.

Les unités :

λ s'exprime en $W.m^{-1}.K^{-1}$.

Le signe négatif signifie que les transferts thermiques ont lieu dans le sens des températures décroissantes. $\vec{j}_{th} \neq \vec{0}$ dès que T n'est pas uniforme.

12.2.4 Ordres de grandeur

Matériau	Conductivité λ en $W.m^{-1}.K^{-1}$
Métal bon conducteur (<i>Ag, Cu</i>)	400
Acier	40
Béton	1
Verre	0,8
Bois	0,2
Laine de verre	0,04
Air	0,03
Polystyrène expansé	0,004

TABLE 12.2 – Conductivités thermiques

12.2.5 Analogie électrique

On peut effectuer une analogie entre la conduction thermique et la conduction électrique :

Électrique	Thermique
$\vec{j}_e = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V$	$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$
$I = \iint_{\Sigma} \vec{j}_e \cdot d^2\vec{S}$	$\phi_{th} = \mathcal{P}_{th} = \iint_{\Sigma} \vec{j}_{th} \cdot d^2\vec{S}$
V	T
γ	λ
I	\mathcal{P}_{th}

TABLE 12.3 – Analogie électrique - thermique

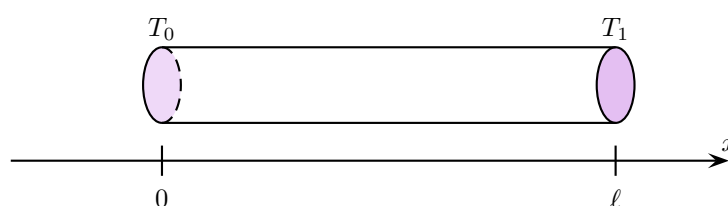
La loi de Fourier de la conduction thermique est analogue à la loi d'Ohm.

12.2.6 Résistance thermique

Considérons une barre cylindrique de section S et de longueur ℓ calorifugée latéralement. Le transfert thermique ne peut donc se faire longitudinalement.

Supposons que les deux extrémités de cette barre soient depuis un temps très long aux températures :

$$T(x=0) = T_0 \text{ et } T(x=\ell) = T_1$$



Après ce régime transitoire apparaît un régime stationnaire dans lequel la température dépend de x :

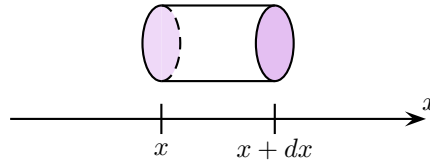
$$T = T(x).$$

12.2.7 Bilan enthalpique

En régime stationnaire, la quantité de chaleur qui entre est égale à la quantité de chaleur qui sort, autrement dit, la quantité de chaleur reçue est nulle. Les transferts thermiques se faisant de manière isobare, on peut écrire :

$$Q_p = \Delta H = 0$$

Isolons une tranche élémentaire de tige de section S située entre les abscisses x et $x + dx$:



Le développement de Taylor-Young de $\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx}$ donne :

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} = \left(\frac{dT}{dx}\right)_x + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx = \left(\frac{dT}{dx}\right)_x + \frac{d^2 T}{dx^2} dx$$

De plus :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{grad} T = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{e}_x$$

Avec $\overrightarrow{d^2 S_{(x)}} = d^2 S \vec{e}_x$ et $\overrightarrow{d^2 S_{(x+dx)}} = -d^2 S \vec{e}_x$, la puissance thermique totale reçue est alors égale à la somme des flux thermiques entrants :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{th} &= \phi_{th} \\ &= \iint_{\Sigma(x)} \vec{j}_{th}(x) \cdot \overrightarrow{d^2 S_{(x)}} + \iint_{\Sigma(x+dx)} \vec{j}_{th}(x+dx) \cdot \overrightarrow{d^2 S_{(x+dx)}} \\ &= -\lambda S \left(\frac{dT}{dx}\right)_x + \lambda S \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} \\ &= \lambda S \frac{d^2 T}{dx^2} dx \end{aligned}$$

Cette puissance totale reçue \mathcal{P}_{th} étant nulle en régime stationnaire, on a nécessairement :



On peut alors représenter le *profil de température* de la barre :

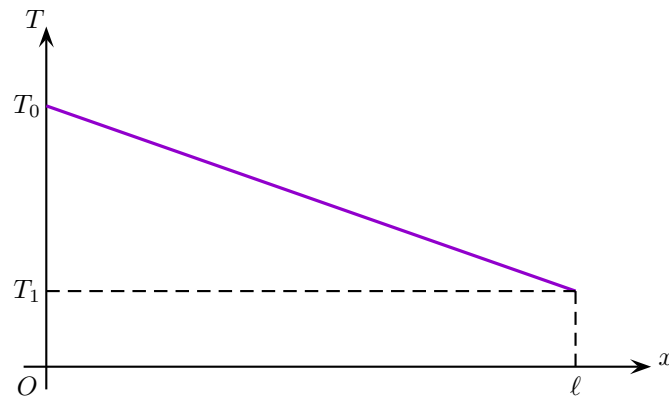


FIGURE 12.1 – Profil de température

12.2.8 Flux thermique

Le flux thermique conductif traversant toute section de la tige peut alors être exprimé par :

$$\mathcal{P}_{th} = \Phi_{th} = -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right) = \frac{\lambda S}{\ell} (T_0 - T_1)$$

12.2.9 Résistance thermique

On peut alors écrire une relation analogue à la loi d'Ohm ($V_P - V_Q = R_{\text{élec}} I$) :

Ici, on a :

$$R_{th} = \frac{\ell}{\lambda S}$$

Φ_{th} est du signe de $T_0 - T_1$: cela signifie que si l'extrémité gauche de la barre possède une température plus élevée que l'extrémité droite, alors le transfert thermique est dirigé de la gauche vers la droite.

Par analogie avec l'électrocinétique, la grandeur R_{th} est appelée *résistance thermique*. Cette dernière dépend de la géométrie et de la nature du matériau.

La résistance thermique est définie de façon générale par :

$$R_{th} = \frac{\Delta T}{\Phi_{th}}$$

Les unités :

La résistance thermique s'exprime en $K.W^{-1}$.

12.2.10 Association de résistances thermiques

⇒ Activité 12.1

- Calculer la résistance thermique équivalente à deux résistances thermiques placées en série.
- Même question avec deux résistances thermiques placées en dérivation.

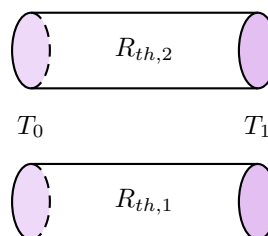
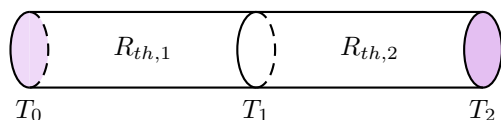


FIGURE 12.2 – Résistances thermiques en série

FIGURE 12.3 – Résistances thermiques en dérivation



— Association de résistances thermiques —

Comme en électrocinétique, des résistances thermiques en série s'ajoutent :

$$R_{th,12,série} = R_{th,1} + R_{th,2}$$

De même, pour des résistances en parallèle, on obtient :

$$\frac{1}{R_{th,12,parallèle}} = \frac{1}{R_{th,1}} + \frac{1}{R_{th,2}}$$

— Remarque —

On peut représenter les résistances thermiques de la même façon que les résistances électriques :

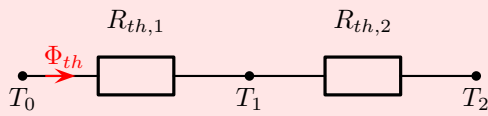


FIGURE 12.4 – Résistances en série

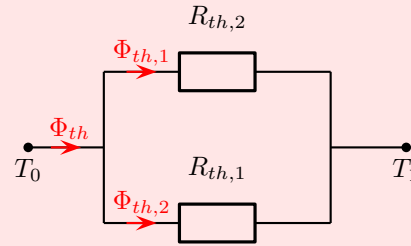
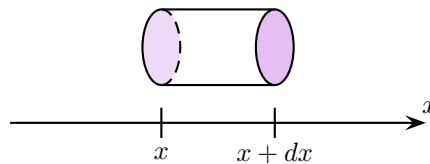


FIGURE 12.5 – Résistances en parallèle

12.3 Équation de la chaleur

12.3.1 Bilan enthalpique

Considérons la tige précédente, de masse volumique ρ , de capacité thermique massique à pression constante c_p et de conductivité thermique λ . Cette tige est calorifugée sur sa paroi cylindrique et les transferts thermiques ne se font donc que longitudinalement, suivant la direction x .



Plaçons-nous en régime non stationnaire. La température dépend alors de 2 variables, l'abscisse x , et le temps t : $T = T(x, t)$.

Le flux thermique entrant par la face gauche, située à l'abscisse x vaut :

$$\Phi_{\text{th}}(x, t) = \iint_{\Sigma(x)} \vec{j}_{\text{th}}(x, t) \cdot \vec{d}^2\vec{S} = j_{\text{th}}(x, t) S$$

De même, le flux thermique sortant par la face droite, située à l'abscisse $x + dx$, vaut :

$$\Phi_{\text{th}}(x + dx, t) = \iint_{\Sigma(x+dx)} \vec{j}_{\text{th}}(x + dx, t) \cdot \vec{d}^2\vec{S} = j_{\text{th}}(x + dx, t) S$$

Le développement de Taylor-Young pour une fonction $f(x, t)$ à deux variables, s'écrit, au premier ordre :

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} h + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} k$$

Soit, pour $j_{\text{th}}(x, t)$:

$$j_{\text{th}}(x + dx, t + dt) = j_{\text{th}}(x, t) + \frac{\partial j_{\text{th}}(x, t)}{\partial x} dx + \frac{\partial j_{\text{th}}(x, t)}{\partial t} dt$$

À un instant t fixé, la puissance élémentaire **entrante** vaut :

$$\begin{aligned}\Phi(x, t) - \Phi(x + dx, t) &= j_{\text{th}}(x, t) S - j_{\text{th}}(x + dx, t) S \\ &= -\frac{\partial j_{\text{th}}(x, t)}{\partial x} S dx\end{aligned}$$

D'autre part, avec $dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial t} dt$, le transfert thermique reçu par le tronçon de barre peut s'écrire, la température étant uniforme sur le tronçon de barre ($\frac{\partial T}{\partial x} = 0$) :

$$\delta^2 Q = dm c_p dT = \rho S dx c_p \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

On en déduit, en égalisant $\Phi(x, t) - \Phi(x + dx, t)$ et $\frac{\delta^2 Q}{dt}$:

$$-\frac{\partial j_{\text{th}}(x)}{\partial x} S dx = \rho S dx c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

La conservation de l'énergie dans le cas unidimensionnel s'écrit finalement :

$$\frac{\partial j_{\text{th}}(x)}{\partial x} + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$



— Remarque —

12.3.2 Équation de la diffusion thermique

La température ne dépendant spatialement que de l'abscisse x , la loi de Fourier $\vec{j}_{\text{th}}(x) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$ s'écrit :

$$j_{\text{th}}(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

On obtient alors l'équation de la diffusion thermique :

$$\frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Ce n'est pas tout-à-fait une équation de propagation, comme on a pu rencontrer en première année, car la dérivée temporelle est d'ordre 1 uniquement.

On peut introduire un nouveau paramètre $\kappa = \frac{\lambda}{\rho c_p}$, appelé diffusivité thermique ou coefficient de diffusion.

Les unités :

Le coefficient de diffusion κ s'exprime en $m^2 \cdot s^{-1}$.

— Remarque —

En 3 dimensions, l'équation de la chaleur s'écrit en fait :

$$\frac{\lambda}{\rho c_p} \Delta T - \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

où ΔT est le laplacien de la température, soit en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

12.3.3 Résolution de l'équation de diffusion

Pour résoudre cette équation de diffusion, il est nécessaire de prendre en compte des valeurs particulières. Ainsi, les conditions aux limites, par exemple en $x = 0$ et $x = \ell$. On pourra également s'intéresser aux conditions initiales, à l'instant $t = 0$.

12.4 Transfert conducto-convectif

12.4.1 Présentation du phénomène

Soit une paroi solide en contact avec un fluide. Celui-ci est le siège de phénomènes de convection : les particules de fluide sont en mouvement et le fluide est donc animé de mouvements de convection provoquant une homogénéisation de sa température.

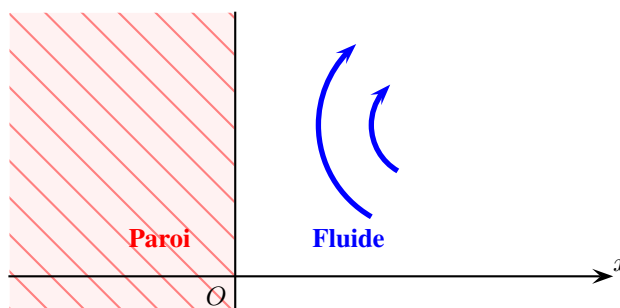


FIGURE 12.6 – Transfert conducto-convectif : phénomène

Considérons que la température du fluide est constante égale à T_F et que le phénomène est unidimensionnel (suivant x).

Dans la paroi, le transfert conductif est donc dirigé suivant l'axe des abscisses x . La température de la paroi en $x = 0^-$ vaut T_P .

Comme la paroi et le fluide ne sont pas à la même température, on peut proposer le profil de température suivant :

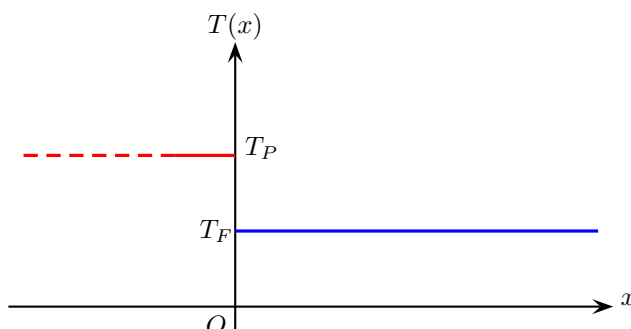


FIGURE 12.7 – Profil de température proposé

Celui-ci permet de mettre en évidence une discontinuité de la température en $x = 0$.

En réalité, il existe une couche de faible épaisseur e (de l'ordre de la fraction de millimètre) appelée couche limite dans laquelle le fluide peut être considéré comme immobile. Dans cette couche, le transfert thermique est donc réalisé par conduction et non par convection.

Le profil réel de la température possède donc plus vraisemblablement l'allure suivante :

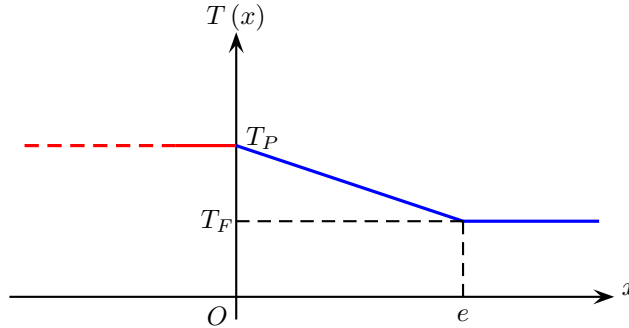


FIGURE 12.8 – Profil de température réel

Il apparaît dans la couche limite un gradient de température.

12.4.2 Loi de Newton

Pour une section d'aire S , on peut définir un flux thermique conducto-convectif, noté Φ_{cc} correspondant au transfert thermique entre la paroi et le fluide :

$$\Phi_{cc} = -\lambda_F S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{0 \leq x \leq e}$$

En considérant que la température est une fonction affine de l'abscisse sur l'intervalle $[0, e]$, on peut écrire :

$$\Phi_{cc} = -\lambda_F S \left(\frac{T_F - T_P}{e} \right)$$

Par unité de surface, cela donne :

$$\varphi_{cc} = \frac{\Phi_{cc}}{S} = -\lambda_F \left(\frac{T_F - T_P}{e} \right)$$

Plus simplement, en posant $h = \frac{\lambda_F}{e}$, on obtient la loi de Newton :

$$\varphi_{cc} = h (T_P - T_F)$$

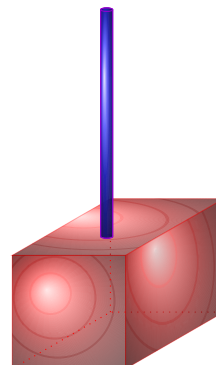
⇒ Activité 12.2

Une ailette de refroidissement cylindrique de rayon r très petit devant sa longueur ℓ , de conductivité thermique λ est en contact par une de ses bases avec un thermostat, ici de forme parallélépipédique, à la température T_0 .

On considère le reste de l'ailette de refroidissement en contact avec l'air ambiant à la température T_f .

On note h le coefficient de conducto-convection de l'ailette et on rappelle la loi de Newton $\varphi_{cc} = h [T(x) - T_f]$ où φ_{cc} est le flux thermique surfacique sortant.

Déterminer l'allure du profil de température $T(x)$ en régime stationnaire.



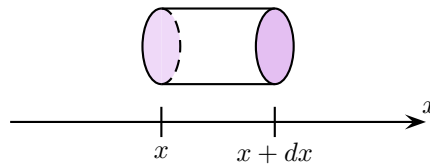


12.5 Rappels : équation de la chaleur

12.5.1 Bilan enthalpique

Considérons la tige précédente, de masse volumique ρ , de capacité thermique pression constante c_p et de conductivité thermique λ . Cette tige est calorifugée sur sa paroi cylindrique et les transferts thermiques ne

se font donc que longitudinalement, suivant la direction x .



Plaçons-nous en régime non stationnaire. La température dépend alors de 2 variables, l'abscisse x , et le temps t : $T = T(x, t)$.

Le flux thermique entrant par la face gauche, située à l'abscisse x vaut :

$$\Phi_{th}(x, t) = \iint_{(\Sigma(x))} \vec{j}_{th}(x) \cdot \vec{d^2S} = j_{th}(x, t) S$$

De même, le flux thermique sortant par la face droite, située à l'abscisse $x + dx$, vaut :

$$\Phi_{th}(x + dx, t) = \iint_{(\Sigma(x+dx))} \vec{j}_{th}(x + dx) \cdot \vec{d^2S} = j_{th}(x + dx, t) S$$

Le développement de Taylor-Young pour une fonction $f(x, t)$ à deux variables, s'écrit, au premier ordre :

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} h + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} k$$

Soit, pour $j_{th}(x, t)$:

$$j_{th}(x + dx, t + dt) = j_{th}(x, t) + \frac{\partial j_{th}(x, t)}{\partial x} dx + \frac{\partial j_{th}(x, t)}{\partial t} dt$$

À un instant t fixé, la puissance élémentaire **entrante** vaut :

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) - \Phi(x + dx, t) &= j_{th}(x, t) S - j_{th}(x + dx, t) S \\ &= -\frac{\partial j_{th}(x)}{\partial x} S dx \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant la relation :

$$dH = H(t + dt) - H(t) = \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

le transfert thermique reçu par le tronçon de barre peut s'écrire :

$$\delta^2 Q_p = d^2 H = dm c_p dT = \rho S dx c_p \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

On en déduit, en égalisant $\Phi(x, t) - \Phi(x + dx, t)$ et $\frac{\delta^2 Q_p}{dt}$:

$$-\frac{\partial j_{th}(x)}{\partial x} S dx = \rho S dx c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

La conservation de l'énergie dans le cas unidimensionnel s'écrit finalement :

$$\boxed{\frac{\partial j_{th}(x)}{\partial x} + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = 0}$$

— Remarque —

En régime stationnaire, on a :

$$\frac{\partial j_{th}(x)}{\partial x} = \frac{dj_{th}}{dx} = 0$$

Et on retrouve, avec $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{e}_x$:

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

12.5.2 Équation de la diffusion thermique

La température ne dépendant spatialement que de l'abscisse x , la loi de Fourier $\vec{j}_{th}(x) = -\lambda \overrightarrow{grad} T$ s'écrit :

$$j_{th}(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

On obtient alors l'équation de la diffusion thermique :

$$\frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Ce n'est pas tout-à-fait une équation de propagation, comme on a pu rencontrer en première année, car la dérivée temporelle est d'ordre 1 uniquement.

On peut introduire un nouveau paramètre $\kappa = \frac{\lambda}{\rho c_p}$, appelé diffusivité thermique ou coefficient de diffusion.

La relation précédente peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Les unités :

Le coefficient de diffusion κ s'exprime en $m^2 \cdot s^{-1}$.

12.5.3 Résolution de l'équation de diffusion

Pour résoudre cette équation de diffusion, il est nécessaire de prendre en compte des valeurs particulières.

Ainsi, les conditions aux limites, par exemple en $x = 0$ et $x = \ell$.

On pourra également s'intéresser aux conditions initiales, à l'instant $t = 0$.

12.6 Résolution dans un cas non stationnaire

12.6.1 Dispositif

Résoudre l'équation de la diffusion thermique dans un cas non stationnaire consiste à déterminer l'évolution de la température en fonction de l'espace et du temps. Si on se place toujours dans un cas unidimensionnel, par exemple suivant la direction x , la température est alors de la forme $T(x, t)$.

Nous considérons ici une barre cylindrique homogène de longueur ℓ et de section S , entièrement calorifugée :

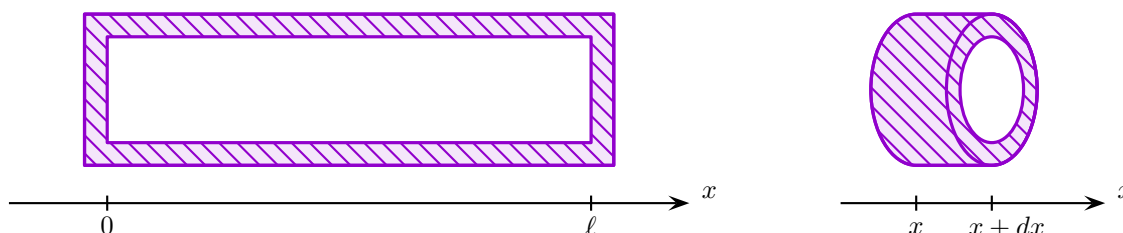


FIGURE 12.9 – Barre calorifugée

12.6.2 Conditions de résolution

- Les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = \ell$ donnent, grâce à la loi de Fourier $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$:

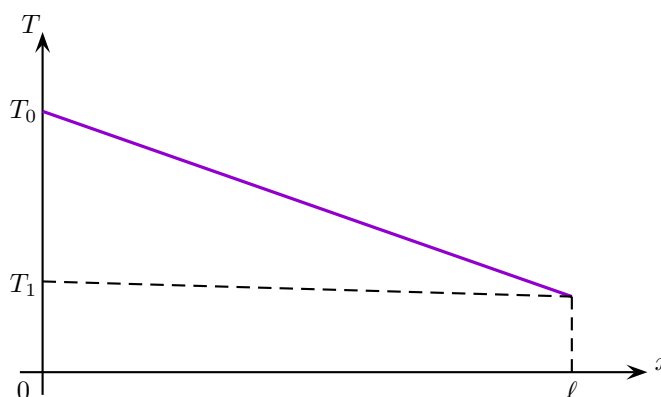
$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x}(\ell, t) = 0 \end{cases}$$

- Les conditions initiales sont supposées connues. On notera pour la suite $T_0(x)$ le profil de température à l'instant initial.

En supposant par exemple que la barre était auparavant en régime stationnaire, on peut poser :

$$T(x, 0) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{x}{\ell}$$

avec le profil de température déjà rencontré auparavant :



12.6.3 Solution stationnaire

Les échanges thermiques au sein de la barre vont mener à une homogénéisation de la température au sein de celle-ci. Notons la température finale T_∞ .

Un bilan enthalpique permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 \int_{x=0}^{x=\ell} \delta^2 Q_p &= \int_{x=0}^{x=\ell} d^2 H \\
 &= \int_{x=0}^{x=\ell} \int_{T_0}^{T_\infty} dm c_p dT \\
 &= \int_{x=0}^{x=\ell} \int_{T_0}^{T_\infty} \rho S c_p dT dx \\
 &= \int_{x=0}^{x=\ell} \rho S c_p [T_\infty - T_0(x)] dx
 \end{aligned}$$

Comme la barre n'échange pas de chaleur avec l'extérieur, cette grandeur est nulle et on en déduit alors :

$$T_\infty = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell T_0(x) dx$$

Cette température correspond à la valeur moyenne de la température dans la barre à l'état initial.

12.6.4 Les différents modes

Pour la suite de l'étude, nous poserons $\Theta(x, t) = T(x, t) - T_\infty$.

Le régime n'est pas permanent et nous chercherons une solution (dite à variables séparées) de la forme :

$$\Theta(x, t) = f(x) g(t)$$

L'équation de diffusion thermique :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

donne alors :

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \Theta}{\partial t}$$

Soit, en tenant compte de la solution recherchée :

$$f''(x) g(t) = \frac{1}{\kappa} f(x) g'(t)$$

ou encore :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{\kappa} \frac{g'(t)}{g(t)}$$

La seule solution possible pour cette équation, si on veut qu'elle soit vérifiée à tout instant et n'importe où, est :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{\kappa} \frac{g'(t)}{g(t)} = C^{te} = -K$$

12.6.4.1 Évolution spatiale

Différents cas se présentent, suivant que le signe de K :

- Si $K = 0$, $f''(x) = 0$, $f'(x) = a$ et $f(x) = ax + b$.
Les conditions aux limites imposent $f'(0) = f'(\ell) = 0$, soit $a = 0$, ce qui conduit à $f(x) = b = C^{te}$, ce qui présente peu d'intérêt.

- Si $K < 0$, la solution est de la forme :

$$f(x) = A \exp(\sqrt{-K} x) + B \exp(-\sqrt{-K} x) \text{ ou } (A' \cosh(\sqrt{-K} x) + B' \sinh(-\sqrt{-K} x))$$

La condition aux limites $f'(0) = f'(\ell) = 0$ donne :

$$\begin{cases} A\sqrt{-K} - B\sqrt{-K} = 0 \\ A\sqrt{-K} \exp(\sqrt{-K} \ell) - B\sqrt{-K} \exp(-\sqrt{-K} \ell) = 0 \end{cases}$$

On obtient donc $A = B$ et ceci conduit à une solution nulle.

- Si $K > 0$, la solution est de la forme :

$$f(x) = A \cos(\sqrt{K} x) + B \sin(\sqrt{K} x)$$

La condition aux limites $f'(0) = f'(\ell) = 0$ donne :

$$\begin{cases} -B\sqrt{K} = 0 \\ -A\sqrt{K} \sin(\sqrt{K} \ell) + B\sqrt{K} \cos(\sqrt{K} \ell) = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} B = 0 \\ A\sqrt{K} \sin(\sqrt{K} \ell) = 0 \end{cases}$$

En considérant les solutions non nulles ($A \neq 0$), la condition précédente impose :

$$\sin(\sqrt{K} \ell) = 0$$

et donc que :

$$\sqrt{K} \ell = n\pi, \text{ soit } \sqrt{K} = \frac{n\pi}{\ell} \text{ et } K = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2.$$

Comme dans le cas de la cavité électromagnétique, l'expression de $f(x)$ est quantifiée et vaut cette fois :

$$f_n(x) = A_n \cos\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right)$$

12.6.4.2 Évolution temporelle

Le rapport $\frac{f''(x)}{f(x)}$ est alors égal à $-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ et :

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = -\kappa \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$$

En posant $\tau = \frac{\ell^2}{\kappa \pi^2}$ et $\tau_n = \frac{\tau}{n^2}$, on a :

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = -\frac{n^2}{\tau} = -\frac{1}{\tau_n}$$

On reconnaît une équation différentielle du premier ordre de la forme :

$$g'(t) + \frac{1}{\tau_n} g(t) = 0$$

⇒ **Activité 12.3**

Donner la solution $g_n(t)$ de cette équation différentielle.

12.6.4.3 Solution générale

La solution générale de l'équation de la chaleur est alors une combinaison linéaire de tous les modes, et en posant $\Theta_n = A_n B_n$, on obtient :

$$\Theta(x, t) = \sum_n \Theta_n \cos\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right) \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \kappa t\right)$$

On retrouve les modes de la cavité électromagnétique :

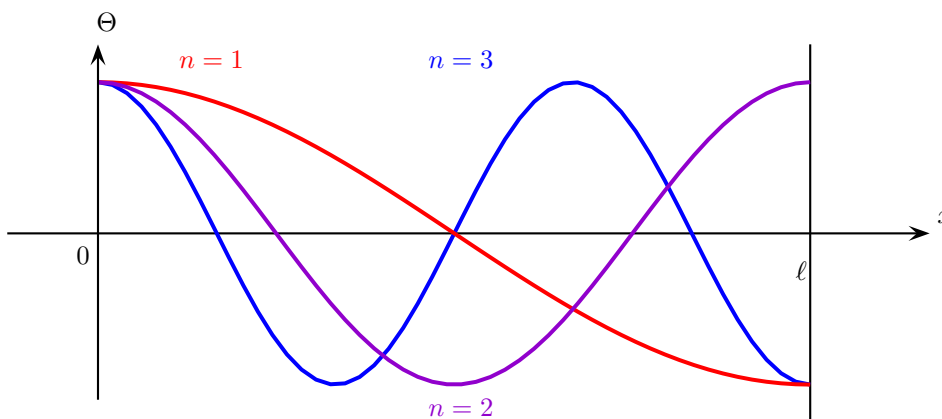


FIGURE 12.10 – Modes

12.6.5 Conditions initiales

Il nous reste ensuite à exploiter les conditions initiales, c'est-à-dire $\Theta_0(x) = T_0(x) - T_\infty$.

À l'instant initial $t = 0$, on a :

$$\Theta_0(x) = \sum_n \Theta_n \cos\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right)$$

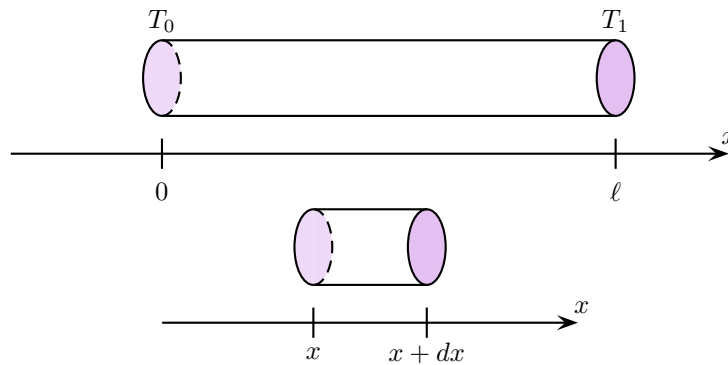
On retrouve l'écriture d'une série de Fourier et on peut en déduire les coefficients Θ_n :

$$\Theta_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \Theta_0(x) \cos\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right) dx$$

- Dans le temps, la fonction exponentielle montre bien une uniformisation.
- Dans l'espace, le mode fondamental va dominer dès que les harmoniques seront suffisamment atténués : l'évolution devient rapidement sinusoïdale.

12.7 Bilan entropique en régime stationnaire

Reprenons la configuration initiale de la barre cylindrique calorifugée sur ses parois latérales et appliquons à un tronçon compris entre les abscisses x et $x + dx$ le deuxième principe de la thermodynamique.



$$d^2 S = \delta^2 S^{\text{échangée}} + \delta^2 S^{\text{créée}}$$

L'entropie créée $\delta^2 S^{\text{créée}}$ est positive ou nulle.

Avec $\delta Q = \Phi_{\text{th}} dt$, l'entropie échangée (**reçue**) vaut :

$$\delta^2 S^{\text{échangée}} = \frac{\Phi_{\text{th}}(x)}{T(x)} dt + \frac{\Phi_{\text{th}}(x+dx)}{T(x+dx)} dt$$

Or, on a :

$$\Phi_{\text{th}}(x) = j_{\text{th}}(x) S \text{ et } \Phi_{\text{th}}(x+dx) = -j_{\text{th}}(x+dx) S$$

On a alors :

$$\delta^2 S^{\text{échangée}} = \frac{j_{\text{th}}(x)}{T(x)} S dt - \frac{j_{\text{th}}(x+dx)}{T(x+dx)} S dt = -S dt \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{j_{\text{th}}(x)}{T(x)} \right) dx$$

En régime stationnaire, nous avons déjà établi que :

$$T(x) = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{x}{l}$$

et que :

$$j_{\text{th}}(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} = C^{te}$$

On en déduit, avec $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ ou avec $j_{\text{th}} = C^{te}$:

$$\begin{aligned} \delta^2 S^{\text{échangée}} &= -S dt \left(-\lambda \frac{dT}{dx} \right) \left(-\frac{1}{T^2(x)} \frac{dT}{dx} \right) dx \\ &= -\lambda S dt \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 \left(\frac{1}{T^2(x)} \right) dx \\ &= -\lambda S dx dt \left(\frac{1}{T(x)} \frac{dT}{dx} \right)^2 \end{aligned}$$

En régime stationnaire, la quantité $d^2 S$ est nulle, ce qui donne $\delta^2 S^{\text{créée}} = -\delta^2 S^{\text{échangée}}$.

Par unité de volume $d\tau = S dx$, l'entropie créée vaut donc :

$$s^{\text{créée}} = \frac{\delta^2 S^{\text{créée}}}{d\tau} = \lambda dt \left(\frac{1}{T(x)} \frac{dT}{dx} \right)^2$$

et l'entropie volumique créée par unité de temps est alors égale à :

$$s'^{\text{créée}} = \frac{s^{\text{créée}}}{dt} = \lambda \left(\frac{1}{T(x)} \frac{dT}{dx} \right)^2$$



Un carré étant toujours positif, cela signifie que l'entropie volumique créée est nécessairement positive. Le phénomène de conduction thermique s'accompagne donc toujours d'une création d'entropie : c'est un **phénomène irréversible**.

